Φυλ. Ασκ. 5, Θεωρία Ομάδων Ασκήσεις στα: Ευθέα Γινόμενα Ομάδων, Θεώρημα Jordan Hölder, Συνθετικές και Κυρίαρχες Σειρές, Επιλύσιμες Ομάδες

Εσωτερικά και Εξωτερικά ευθέα Γινόμενα

Α 1. Έστω η κυκλική ομάδα $(\mathbb{Z}_p, +)$, όπου ο p είναι πρώτος αριθμός. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{Z}_p^3 := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ και την απεικόνιση

$$\begin{aligned}\star : \mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p^3 \to & \mathbb{Z}_p^3,\\ ([a]_p, [b]_p, [c]_p), ([a']_p, [b']_p, [c']_p) \mapsto & \\ & ([a]_p + [a']_p, [b]_p + [b']_p, [c]_p + [c']_p - [b]_p \cdot [a']_p),\end{aligned}$$

όπου «·» είναι ο πολλαπλασιασμός $\bmod p$.
Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathbb{Z}_p^3, \star)$ είναι μια ομάδα τάξης p^3, η οποία δεν είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Λύση. Πρόκειται για απλή άσκηση που σκοπός της είναι να αποδείξει ότι υπάρχουν ομάδες τάξης p^3, που δεν είναι μεταθετικές, ενώ είναι γνωστό ότι κάθε ομάδα τάξης p ή p^2 είναι αβελιανή. Αφήνουμε τις περισσότερες λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $([0]_p, [0]_p, [0]_p)$ και το αντίστροφο τού $([a]_p, [b]_p, [c]_p)$ είναι το $(-[a]_p, -[b]_p, -[c]_p + [b]_p \cdot [a]_p)$.

Θεωρούμε τα στοιχεία $x = ([1]_p, [1]_p, [0]_p)$ και $y = ([0]_p, [1]_p, [0]_p)$ τής $\mathbb{Z}_p^3$. Έχουμε:

$$x \star y = ([1]_p, [1]_p, [0]_p) \star ([0]_p, [1]_p, [0]_p) = ([1]_p, [2]_p, [0]_p - [1]_p \cdot [0]_p) = ([1]_p, [2]_p, [0]_p)$$

ενώ

$$y \star x = ([0]_p, [1]_p, [0]_p) \star ([1]_p, [1]_p, [0]_p) = ([1]_p, [2]_p, [0]_p - [1]_p \cdot [1]_p) = ([1]_p, [2]_p, [p-1]_p).$$

Προφανώς, $x \star y \neq y \star x$, αφού $[p-1]_p \neq [0]_p$, επειδή $p \geq 2$.

Αφού η $(\mathbb{Z}_p^3, \star)$ δεν είναι αβελιανή, δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ που είναι μια αβελιανή ομάδα.

Α 2. Συμβολίζουμε με C_n την κυκλική ομάδα τάξης n και με V την ομάδα των τεσσάρων στοιχείων τού Klein. Να εξεταστεί αν, μεταξύ των εξωτερικών ευθέων γινομένων $C_2 \times V$, $C_4 \times C_2$ και C_8 υπάρχουν δύο ισόμορφες ομάδες.

Λύση. Η C_8 δεν είναι ισόμορφη με καμιά από τις άλλες δύο, διότι στη C_8 υπάρχει στοιχείο τάξης 8, ενώ οι άλλες δεν έχουν στοιχεία τάξης 8. Αλλά ούτε η $C_2 \times V$ είναι ισόμορφη με την $C_4 \times C_2$, αφού η πρώτη δεν έχει στοιχείο τάξης 4 ενώ η δεύτερη έχει.

Α 3. Να δειχθεί ότι για κάθε πρώτο αριθμό p, υπάρχουν ακριβώς δύο μη ισόμορφες ομάδες τάξης p^2.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι κάθε ομάδα $(G, \star)$ τάξης p^2 είναι αβελιανή.

Αν η G διαθέτει ένα στοιχείο τάξης p^2, τότε είναι κυκλική και γι' αυτό είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Αν η G δεν διαθέτει στοιχείο τάξης p^2, τότε κάθε στοιχείο της $\neq e_G$ έχει τάξη p. Έστω $\alpha \in G$ ένα στοιχείο τάξης p και $A = \langle \alpha \rangle$ η αντίστοιχη κυκλική υποομάδα που παράγεται από αυτό. Τώρα κάθε στοιχείο τής G, που ανήκει στη διαφορά $G \setminus A$ έχει τάξη p. Ας είναι $\beta \in G \setminus A$ και $B = \langle \beta \rangle$ η αντίστοιχη κυκλική υποομάδα που παράγεται από αυτό.

Παρατηρούμε ότι $A \cap B = \{e_G\}$, αφού από $A \cap B \neq \{e_G\}$ προκύπτει $A \cap B = A$ και $A \cap B = B$, αφού οι A, B είναι υποομάδες που και οι δύο έχουν τάξη τον πρώτο αριθμό p.

Παρατηρούμε ότι $G = AB$, διότι το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου AB ισούται με $\frac{[A:1][B:1]}{[A \cap B:1]} = \frac{p^2}{1} = p^2$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι $A \trianglelefteq G$ και $B \trianglelefteq G$, αφού η G είναι αβελιανή ομάδα. Συνεπώς, ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις ώστε η G να ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των A και B και γι' αυτό $G \cong A \times B$. Επειδή $A \cong \mathbb{Z}_p$ και $B \cong \mathbb{Z}_p$, έπεται ότι $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Ώστε, κάθε ομάδα τάξης p^2 είναι ισόμορφη ή με την $\mathbb{Z}_p$ ή με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Α 4. Να δειχθεί ότι η διεδρική ομάδα D_6 είναι ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $D_3 \times C_2$ και ακολούθως να ευρεθεί μια υποομάδα τής $D_3 \times C_2$ τάξης 6.

Λύση. (συνοπτική!) Υπενθυμίζουμε ότι η D_6 είναι η ομάδα των στερεών κινήσεων τού τετραγώνου, η οποία μπορεί να οριστεί μέσω γεννητόρων και σχέσεων ως

$$D_6 = \langle \rho, s \mid \rho^6 = 1, s^2 = 1, \rho s = s\rho^5 \rangle.$$

και ότι η D_3 είναι η ομάδα των στερεών κινήσεων τού ισοπλεύρου τριγώνου, η οποία μπορεί να οριστεί μέσω γεννητόρων και σχέσεων ως

$$D_3 = \langle \hat{\rho}, \hat{s} \mid \hat{\rho}^4 = 1, s^2 = 1, \hat{\rho}\hat{s} = \hat{s}\hat{\rho}^3 \rangle.$$

Η υποομάδα $N_1 = \langle s, \rho^2 \rangle$ τής D_6 είναι τάξης 6, επομένως $[D_6 : N_1] = 2$ και γι' αυτό η N_1 είναι ορθόθετη υποομάδα τής D_6. Επίσης, η $N_2 = \langle \rho^3 \rangle$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής D_6, αφού το στοιχείο ρ^3 ανήκει στο κέντρο $Z(D_6)$ τής D_6. Η τάξη τής N_2 ισούται με 2 και $N_1 \cap N_2 = \{1\}$. Επομένως, η D_6 είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των N_1 και N_2 και ως εκ τούτου ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των N_1 και N_2. Αλλά η N_1 είναι ισόμορφη με την D_3 (γιατί;) και η N_2 με την C_2.

Τώρα αφού προσδιορίσουμε έναν συγκεκριμένο ισομορφισμό σ από την D_6 στην $D_3 \times C_2$, θεωρούμε την υποομάδα $K = \langle \rho \rangle$ τής D_6, η οποία είναι τάξης 6, και η εικόνα της $\sigma(K)$ είναι μια υποομάδα τάξης 6 τής $D_3 \times C_2$.

Α 5. Να δειχθεί ότι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι κυκλική αν, και μόνο αν, όλες οι Sylow–υποομάδες της είναι κυκλικές.

Λύση. Αν η $(G, \star)$ είναι μια μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, τότε και κάθε υποομάδα της είναι κυκλική, συνεπώς και όλες οι Sylow–υποομάδες της είναι κυκλικές.

Αντίστροφα, αν η $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα, τότε για κάθε πρώτο διαιρέτη p τής τάξης της υπάρχει ακριβώς μία p–Sylow υποομάδα, η οποία λόγω τής υπόθεσης είναι κυκλική. Προφανώς, οι τάξεις δύο οποιωνδήποτε Sylow υποομάδων που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς πρώτους είναι σχετικώς πρώτες μέταξύ τους.

Αν δείξουμε λοιπόν, ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της, τότε είναι ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της και τότε θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη, αφού γνωρίζουμε ότι ένα πεπερασμένο ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων των οποίων οι τάξεις είναι ανά δύο σχετικώς πρώτες είναι πάντοτε μια κυκλική ομάδα.

Έστω $P_1, P_2, \ldots, P_s$ οι Sylow υποομάδες που αντιστοιχούν στους διαφορετικούς πρώτους $p_1, p_2, \ldots, p_s$ που διαιρούν την τάξη τής G. Θέτουμε $[P_i : 1] = p_i^{a_i}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\forall i, 1 \leq i \leq s, P_i \bigcap (P_1 P_2 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_s) = \{e_G\}, \qquad (*)$$

διότι αν το $g \in G$ είναι στοιχείο τής τομής, τότε η τάξη $\circ(g)$ είναι δύναμη τού p_i, αφού $g \in P_i$ και επιπλέον, το στοιχείο g υψούμενο στο γινόμενο

$$m_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{i-1}^{a_{i-1}} p_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots p_s^{a_s}$$

ισούται με το e_G, αφού το $g = g_1 g_2 \ldots g_{i-1} \ldots g_{i+1} \ldots g_s$, $g_j \in P_j$, $1 \leq j \leq s$, $j \neq i$ και αφού γενικά $g^\alpha = g_1^\alpha g_2^\alpha \ldots g_{i-1}^\alpha \ldots g_{i+1}^\alpha \ldots g_s^\alpha$, επειδή η G είναι αβελιανή ομάδα. Επομένως, η τάξη $\circ(g)$ είναι διαιρέτης τού m_i. Αλλά ο m_i και οποιαδήποτε δύναμη τού p_i είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, γι' αυτό $\circ(g) = 1$ και $g = e_G$.

Τώρα έχουμε ότι:

(α′) $\forall i, 1 \leq i \leq s, P_i \trianglelefteq G$.

(β′) $\forall i, 2 \leq i \leq s, (P_1 P_2 \ldots P_{i-1}) \cap P_i = \{e_G\}$, λόγω τής (*)

(γ′) $G = P_1P_2\dots P_s$, αφού $[G:1] = [P_1P_2\dots P_s:1]$, διότι λαμβάνοντας υπ' όψιν την (*) έχουμε:

$$[P_1(P_2\dots P_s):1] = \frac{[P_1:1][P_2\dots P_s:1]}{[P_1\cap(P_2\dots P_s):1]} = [P_1:1][P_2\dots P_s:1] =$$
$$[P_1:1]\frac{[P_2:1][P_3\dots P_s:1]}{[P_2\cap(P_3\dots P_s):1]} = [P_1:1][P_2:1][P_3\dots P_s:1] = \dots$$
$$[P_1:1][P_2:1][P_3:1]\dots[P_s:1] = [G:1].$$

Επομένως, η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της και η απόδειξη έχει πλέον ολοκληρωθεί.

Α 6. Έστω ότι η ομάδα $(G,\star)$ είναι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των ομάδων $(G_1,\star_1)$ και $(G_2,\star_2)$ και ότι $H \trianglelefteq G$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G με την ιδιότητα:

$$H\cap(G_1\times\{e_{G_2}\}) = \{(e_{G_1},e_{G_2})\}, \text{ και } H\cap(\{e_{G_1}\}\times G_2) = \{(e_{G_1},e_{G_2})\}.$$

Να δειχθεί ότι η H είναι αβελιανή.

Λύση. Έστω ένα στοιχείο $(a,b)\in H$. Για κάθε στοιχείο (g_1,e_{G_2}), $g_1\in G_1$, το στοιχείο $(g_1,e_{G_2})^{-1}(a,b)(g_1,e_{G_2}) = (g_1ag_1^{-1},b)$ ανήκει στην H, αφού $H\trianglelefteq G$. Γι' αυτό και το

$$(g_1ag_1^{-1},b)(a,b)^{-1} = (g_1ag_1^{-1}a^{-1},bb^{-1}) = (g_1ag_1^{-1}a^{-1},e_{G_2})$$

είναι επίσης στοιχείο τής H. Συνεπώς $(g_1ag_1^{-1}a^{-1},e_{G_2})\in H\cap(G_1\times\{e_{G_2}\}) = \{(e_{G_1},e_{G_2})\}$ και έτσι $g_1ag_1^{-1}a^{-1} = e_{G_1}$, δηλαδή

$$\forall g_1\in G_1, \forall(a,b)\in H, g_1a = ag_1.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\forall g_2\in G_2, \forall(a,b)\in H, g_2b = bg_2.$$

Επομένως,

$$\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in H \text{ είναι } (a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_2,b_2)(a_1,b_1),$$

αφού $a_1\in G_1$ και $b_1\in G_2$. Ώστε, η H είναι αβελιανή.

Α 7. Έστω ότι η ομάδα $(G, \star)$ είναι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των πεπερασμένων ομάδων $(G_1, \star_1), (G_2, \star_2), \ldots, (G_s, \star_s)$, των οποίων οι τάξεις $[G_i : 1] = n_i, i = 1, \ldots, s$ είναι ανά δύο σχετικώς πρώτες, δηλαδή Μ.Κ.Δ.$(n_i, n_j) = 1, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq s, i \neq j$.

Να δειχθεί ότι οποιαδήποτε υποομάδα $H \leq G$ τής G ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων $H \cap \hat{G}_i, i = 1, 2, \ldots, s$, όπου

$$\hat{G}_i = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \mid g_i \in G_i\}.$$

Λύση. Θα εκτελέσουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση $G = G_1 \times G_2$, η γενική περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη.
Έστω H μια υποομάδα τής G.
(*) Θα δείξουμε ότι αν, (a, b) είναι ένα στοιχείο τής H, τότε τα (a, e_{G_2}) και (e_{G_1}, b) είναι επίσης στοιχεία τής H.
Τότε επειδή $H \cap \hat{G}_1 \trianglelefteq H$, $H \cap \hat{G}_2 \trianglelefteq H$ και επειδή κάθε $(a, b) \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $(a, b) = (a, e_{G_2})(e_{G_1}, b)$, όπου $(a, e_{G_2}) \in H \cap \hat{G}_1$ και $(e_{G_1}, b) \in H \cap \hat{G}_2$, συμπεραίνουμε ότι η H είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $H \cap \hat{G}_1$ και $H \cap \hat{G}_2$.

Ας προχωρήσουμε στην απόδειξη τού ισχυρισμού (*). Αν το (a, b) ισούται με το ουδέτερο στοιχείο (e_{G_1}, e_{G_2}) δεν χρειάζεται να αποδείξουμε τίποτα. Έστω ότι $(a, b) \neq (e_{G_1}, e_{G_2})$. Ας πούμε, $a \neq e_{G_1}$. Προφανώς, η τάξη $\circ(a)$ τού a είναι μεγαλύτερη τού 1. Η δύναμη

$$(a, b)^{\circ(a)} = (a^{\circ(a)}, b^{\circ(a)}) = (e_{G_1}, b^{\circ(a)})$$

είναι επίσης ένα στοιχείο τής H.
Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο Μ.Κ.Δ. των τάξεων των ομάδων G_1 και G_2 ισούται με 1 και γι' αυτό και ο Μ.Κ.Δ.$(\circ(a), \circ(b))$ ισούται επίσης με 1, αφού οι τάξεις των στοιχείων είναι διαιρέτες των αντίστοιχων ομάδων στις οποίες ανήκουν τα στοιχεία. Γι' αυτό υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ με

$$1 = \lambda \cdot \circ(a) + \mu \cdot \circ(b).$$

Τώρα έχουμε:

$$b = b^{\lambda \cdot \circ(a) + \mu \cdot \circ(b)} = b^{\lambda \cdot \circ(a)} = {b^{\circ(a)}}^{\lambda}.$$

Αφού λοιπόν το στοιχείο $(e_{G_1}, b^{\circ(a)})$ ανήκει στην H, συμπεραίνουμε ότι και το $(e_{G_1}, b^{\circ(a)})^{\lambda} = (e_{G_1}, b)$ ανήκει στην H.
Η απόδειξη ότι όταν $(a, b) \in H$, τότε και $(a, e_{G_2}) \in H$ είναι εντελώς ανάλογη.

$\mathbb{A}_n$ και Παράγωγες Υποομάδες

Α 8. Έστω ότι $H \trianglelefteq \mathbb{A}_n$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_n$, η οποία περιέχει το γινόμενο δύο αποσυνδετών[1] αντιμεταθέσεων τής συμμετρικής ομάδας S_n.

Αν $n \geq 5$, να δείξετε ότι $H = \mathbb{A}_n$.

(*Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το ότι η* $\mathbb{A}_n$ *είναι απλή.*)

Λύση. Στις σημειώσεις τής θεωρίας έχουμε αποδείξει ότι:
Αν μια ορθόθετη υποομάδα H *τής* $\mathbb{A}_n, n \geq 3$ *περιέχει έναν κύκλο μήκους τρία, τότε συμπίπτει με την* $\mathbb{A}_n$.
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η H περιέχει έναν κύκλο μήκους 3. Ας είναι $\sigma = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix} \in H$ το γινόμενο των αποσυνδετών κύκλων μήκους 2 που περιέχεται στην H, όπου τα $i, j, k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά μέταξύ τους. Επειδή τώρα $n \geq 5$, υπάρχει κάποιοιο $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ διαφορετικό από τα i, j, k, ℓ. Θεωρούμε το στοιχείο $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k & m \end{pmatrix}$ τής $\mathbb{A}_n$.
Το γινόμενο $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ ανήκει στην H, αφού $H \trianglelefteq \mathbb{A}_n$ και το $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ ανήκει επίσης στην H, αφού $\sigma^{-1} \in H$. Είναι:

$$\begin{aligned}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}) \circ \sigma^{-1} = &\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m & \ell \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} m & \ell \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m & \ell \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Α 9. (α$'$) Να υπολογίσετε τις παράγωγες ομάδες $\mathbb{A}'_n$ τής εναλλάσσουσας ομάδας $\mathbb{A}_n$, όταν $n = 3$ ή 4.

(β$'$) Να δειχθεί ότι η παράγωγη υποομάδα $\mathbb{A}'_n$ τής $\mathbb{A}_n$ είναι η $\mathbb{A}_n$, όταν $n \geq 5$.

(γ$'$) Να δειχθεί ότι η παράγωγη υποομάδα S'_n τής συμμετρικής ομάδας S_n είναι η $\mathbb{A}_n$, όταν $n \geq 5$.
(*Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το ότι η* $\mathbb{A}_n$ *είναι απλή.*)

Λύση. (α$'$) Η $\mathbb{A}_3$ είναι αβελιανή, αφού είναι μια ομάδα τάξης 3. Γι' αυτό $\mathbb{A}'_3 = \{\mathrm{Id}_{S_3}\}$.
Θεωρούμε την υποομάδα

$$V = \left\{\mathrm{Id}_{S_4}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

τής $\mathbb{A}_4$. Έχουμε αποδείξει στις σημειώσεις τής θεωρίας ότι είναι ορθόθετη και ότι η πηλικοομάδα $\mathbb{A}_4/V$ είναι αβελιανή. Επομένως, $\mathbb{A}'_4 \leq V$. Αλλά η μοναδική ορθόθετη και $\neq \{e_{\mathbb{A}_4}\}$ υποομάδα τής $\mathbb{A}_4$ που περιέχεται στη V είναι η V. Επομένως, $\mathbb{A}'_4 = V$.
(β$'$) Επειδή η παράγωγη υποομάδα $\mathbb{A}'_n$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_n$ και $n \geq 5$,

[1] Δύο κύκλοι τής S_n με μήκος ≥ 2 ονομάζονται *αποσυνδετοί* αν, δεν έχουν κοινά στοιχεία.

για να δείξουμε ότι $\mathbb{A}_n' = \mathbb{A}_n$, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει έναν κύκλο μήκους 3. Θεωρούμε τα στοιχεία $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε τον μεταθέτη:

$$\begin{aligned}[\tau, \sigma] =&\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \\ &\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\end{pmatrix} \in \mathbb{A}_n'.\end{aligned}$$

(γ′) Θεωρούμε τα στοιχεία $\sigma = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ τής S_n. Το $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ είναι στοιχείο τής παράγωγης υποομάδας S_n' και ισούται με $\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$ που είναι στοιχείο τής $\mathbb{A}_n$. Γι' αυτό $S_n' \cap \mathbb{A}_n \neq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$. Αφού όμως πρόκειται για μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_n$ που περιέχει το γινόμενο $\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$, το οποίο είναι γινόμενο δύο αποσυνδετών αντιμεταθέσεων, οφείλει σύμφωνα με την Άσκηση 8 να ισούται με την $\mathbb{A}_n$.

Α 10. Να δειχθεί ότι το κέντρο $Z(\mathbb{A}_n)$ τής $\mathbb{A}_n$ είναι η τετριμμένη υποομάδα $\{\mathrm{Id}_{S_n}\}$, όταν $n \geq 5$.

Λύση. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ότι η $\mathbb{A}_n, n \geq 5$ είναι απλή. Επειδή το κέντρο οποιασδήποτε ομάδας είναι ορθόθετη υποομάδα τής ομάδας, στη συγκεκριμένη περίπτωση έπεται ότι $Z(\mathbb{A}_n) = \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$.

Σειρές Ομάδων

Α 11. Να δειχθεί ότι όλοι οι κυρίαρχοι παράγοντες μιας μη τετριμμένης p–ομάδας είναι κυκλικές ομάδες τάξης p.

Λύση. Στη θεωρία έχουμε αποδείξει ότι κάθε p–ομάδα είναι επιλύσιμη και ότι κάθε κυρίαρχος παράγοντάς της είναι κυκλική ομάδα τάξης p. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική απόδειξη: Θα εκτελέσουμε μια απόδειξη με επαγωγή ως προς n, όπου p^n είναι η τάξη τής p–ομάδας και όπου ο p είναι ένας σταθερός πρώτος αριθμός.
Για $n = 1$, η G είναι μια ομάδα τάξης p και η σειρά

$$\{e_G\} \leq G$$

είναι μια κυρίαρχη σειρά, αφού η G είναι κυκλική πρώτης τάξης p. Επιπλέον, $G/\{e_G\} \cong \mathbb{Z}_p$ και στη συγκεκριμένη περίπτωση ο ισχυρισμός τής άσκησης είναι αληθής.

Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε ομάδα τάξης p^n, όπου $n \leq k$. Θα τον αποδείξουμε για $n = k + 1$, δηλαδή για μια ομάδα G τάξης p^{k+1}.

Στη θεωρία έχουμε αποδείξει ότι κάθε μη τετριμμένη p–ομάδα έχει μη τετριμμένο κέντρο. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $x \neq e_G$ με $x \in Z(G)$.
Αν $\langle x \rangle = G$, τότε η G είναι κυκλική τάξης p^{k+1} και η σειρά

$$\langle x \rangle > \langle x^p \rangle > \cdots > \langle x^{p^i} \rangle > \langle x^{p^{i+1}} \rangle > \cdots > \langle x^{p^k} \rangle > \langle x^{p^{k+1}} \rangle = \{e_G\}, \quad (*)$$

είναι κυρίαρχη με κυρίαρχους παράγοντες $\forall i, 0 \leq i \leq k, \langle x^{p^i} \rangle / \langle x^{p^{i+1}} \rangle$ κυκλικές ομάδες τάξης p.
Αν $\langle x \rangle \gneqq G$ και επειδή η $\langle x \rangle$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G, μπορούμε να σχηματίσουμε την πηλικοομάδα $G/\langle x \rangle$, τής οποίας η τάξη είναι p^r, όπου $1 < r < k+1$ αφού, $[G/\langle x \rangle : 1] = \frac{[G:1]}{[\langle x \rangle :1]} = \frac{p^{k+1}}{[\langle x \rangle :1]}$ και $p^{k+1} \gneqq [\langle x \rangle : 1] \gneqq 1$.
Λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης, η $G/\langle x \rangle$ διαθέτει μια κυρίαρχη σειρά

$$G/\langle x \rangle = H_0 > H_1 > \ldots H_i > H_{i+1} \cdots > H_t = \langle x \rangle / \langle x \rangle, \quad (**)$$

όπου $\forall i, 0 \leq i \leq t-1$ οι κυρίαρχοι παράγοντες H_i/H_{i+1} είναι κυκλικές ομάδες τάξης p.
Θεωρούμε τον κανονικό επιμορφισμό $\pi : G \to G/\langle x \rangle, g \mapsto g\langle x \rangle$ και για κάθε ορθόθετη υποομάδα H_i τής κυρίαρχης σειράς (**) σχηματίζουμε την προεικόνα της $G_i := \pi^{-1}(H_i) \leq G$.
Παρατηρούμε ότι $\forall i, 0 \leq i \leq t$ είναι $\langle x \rangle < G_i$, ότι οι G_i είναι ορθόθετες υποομάδες τής G, ότι $\forall i, 0 \leq i \leq t-1$ η G_i περιέχει γνησίως την G_{i+1} και ότι $\forall i, 0 \leq i \leq t$ είναι $H_i = G_i/\langle x \rangle$.
Τέλος από τα θεωρήματα ισομορφισμού έχουμε $\forall i, 0 \leq i \leq t-1, G_i/G_{i+1} \cong H_i/H_{i+1}$. Συνεπώς, όλες οι πηλικοομάδες G_i/G_{i+1} είναι κυκλικές ομάδες τάξης p.
Θεωρούμε την ακολουθία υποομάδων:

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_i > G_{i+1} \cdots > G_t = \langle x \rangle. \quad (***)$$

Παρατηρούμε ότι η (***) δεν επιδέχεται μη τετριμμένη εκλέπτυνση, αφού τα πηλίκα G_i/G_{i+1} είναι κυκλικές ομάδες τάξης p. Τώρα συμπληρώνουμε την (***) με την κυρίαρχη σειρά που προκύπτει από την κυκλική υποομάδα $\langle x \rangle$. Αν η τάξη τού x είναι p^s, $1 < s < k+1$, τότε πρόκειται για την ανάλογη τής κυρίαρχης σειράς που είδαμε στην (*):

$$\langle x \rangle > \langle x^p \rangle > \cdots > \langle x^{p^i} \rangle > \langle x^{p^{i+1}} \rangle > \cdots > \langle x^{p^{s-1}} \rangle > \langle x^{p^s} \rangle = \{e_G\}.$$

Τώρα η σειρά

$$G = G_0 > \cdots > G_i > \cdots > G_t = \langle x \rangle > \cdots > \langle x^{p^i} \rangle > \cdots > \langle x^{p^{s-1}} \rangle > \langle x^{p^s} \rangle = \{e_G\}.$$

Η σειρά που κατασκευάσαμε είναι κυρίαρχη και οι κυρίαρχοι παράγοντές της είναι όλοι κυκλικές ομάδες τάξης p.

Α 12. Να δοθεί παράδειγμα δύο μη ισόμορφων ομάδων που να διαθέτουν ισόμορφες κυρίαρχες σειρές.

Λύση. Θεωρούμε τις μη ισόμορφες ομάδες $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_4$ και τις αντίστοιχες κυρίαρχες σειρές

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 > \mathbb{Z}_2 \times \{[0]_2\} > \{[0]_2\} \times \{[0]_2\},$$

$$\mathbb{Z}_4 > \langle [2]_4 \rangle > \{[0]_4\}.$$

Το σύνολο των κυρίαρχων παραγόντων τής πρώτης είναι

$$\{(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \times \{[0]_2\}) \cong \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_2 \times \{[0]_2\}/\{[0]_2\} \times \{[0]_2\}) \cong \mathbb{Z}_2\}$$

και τής δεύτερης

$$\{(\mathbb{Z}_4/\langle [2]_4 \rangle) \cong \mathbb{Z}_2, (\langle [2]_4 \rangle/\{[0]_4\}) \cong \mathbb{Z}_2\}.$$

Συνεπώς, έχουν ισόμορφες κυρίαρχες σειρές.

Α 13. Να δοθεί παράδειγμα δύο πεπερασμένων ομάδων που να έχουν την ίδια τάξη, αλλά όπου τα μήκη των συνθετικών σειρών τους να είναι διαφορετικά.

Λύση. Θεωρούμε την εναλλάσσουσα ομάδα $\mathbb{A}_5$, η οποία είναι απλή και έχει τάξη 60 και την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_{60}$. Η συνθετική σειρά τής πρώτης είναι η

$$\mathbb{A}_5 > \{\mathrm{Id}_{S_5}\}$$

και τής δεύτερης είναι η

$$\mathbb{Z}_{60} > \langle [5]_{60} \rangle > \langle [10]_{60} \rangle > \langle [20]_{60} \rangle > \langle [0]_{60} \rangle.$$

Το σύνολο των συνθετικών παραγόντων τής πρώτης είναι το $\{\mathbb{A}_5\}$ και τής δεύτερης το

$$\{(\mathbb{Z}_{60}/\langle [5]_{60}) \cong \mathbb{Z}_5, (\langle [5]_{60} \rangle/\langle [10]_{60} \rangle) \cong \mathbb{Z}_2, (\langle [10]_{60} \rangle/\langle [20]_{60} \rangle) \cong \mathbb{Z}_2\ (\langle [20]_{60} \rangle/\langle [0]_{60} \rangle) \cong \mathbb{Z}_3\}.$$

Α 14. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\}, \tag{*}$$

είναι μια υποορθόθετη (αντιστοίχως ορθόθετη) ακολουθία υποοομάδων για την G.

(α′) Αν $H \leq G$ είναι μια υποομάδα τής G, τότε να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$H = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_r = \{e_G\}, \text{ με } H_i = G_i \cap H, i = 0, 1, \ldots, r$$

είναι μια υποορθόθετη (αντιστοίχως ορθόθετη) ακολουθία υποοομάδων για την H, όπου $\forall i, i = 0, 1, \ldots, r-1$, η πηλικοομάδα H_i/H_{i+1} είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής G_i/G_{i+1}.

(β′) Επιπλέον αν, η $H \trianglelefteq G$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, τότε να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$G/H = \hat{G}_0 \geq \hat{G}_1 \geq \cdots \geq \hat{G}_r = \{e_{G/H}\}, \text{ με } \hat{G}_i = G_iH/H, i = 0, 1, \ldots, r$$

είναι μια υποορθόθετη (αντιστοίχως ορθόθετη) ακολουθία υποοομάδων για την G/H, όπου $\forall i, i = 0, 1, \ldots, r-1$, η $\hat{G}_i/\hat{G}_{i+1}$ είναι μια πηλικοομάδα τής G_i/G_{i+1}.

Λύση. Ουσιαστικά τα περισσότερα στοιχεία τής άσκησης έχουν ήδη συζητηθεί στο μάθημα.

Α 15. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι H, K είναι δύο υποομάδες της. Να δειχθεί ότι αν, η H είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής G και η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής H, τότε η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής G.

Λύση. Έστω $\phi : G \to G$ ένας αυτομορφισμός τής G. Θα δείξουμε ότι $\phi(K) = K$. Παρατηρούμε ότι επειδή η H είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής G, έχουμε $\phi(H) = H$, δηλαδή ο ϕ περιορισμένος στην H είναι ένας αυτομορφισμός τής H. Επομένως, $\phi(K) = K$, αφού η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής H. Ώστε η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής G.

Α 16. Να προσδιορίσετε όλες τις χαρακτηριστικές υποομάδες τής συμμετρικής ομάδας S_3, τής διεδρικής ομάδας D_4 και τής ομάδας των τετρανίων Q_8.

Λύση. Θα αναζητήσουμε τις χαρακτηριστικές υποομάδες μεταξύ των ορθόθετων υποομάδων, αφού κάθε χαρακτηριστική είναι και ορθόθετη.

Η S_3 έχει τις ορθόθετες υποομάδες $\{Id_{S_3}\}$, S_3 και $\mathbb{A}_3$. Οι δύο πρώτες είναι προφανώς χαρακτηριστικές. Αν ϕ αυτομορφισμός τής S_3, τότε ο ϕ διατηρεί τις τάξεις των υποομάδων. Επομένως, η $\mathbb{A}_3$ απεικονίζεται σε μια υποομάδα τής S_3 τάξης 3. Η μοναδική υποομάδα τάξης 3 τής S_3 είναι η $\mathbb{A}_3$. Συνεπώς, η $\mathbb{A}_3$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής S_3.

Υπενθυμίζουμε ότι η D_4 είναι η ομάδα των στερεών κινήσεων τού τετραγώνου και ότι

$$D_4 = \langle \rho, s \mid \rho^4 = 1, s^2 = 1, \rho s = s\rho^3 \rangle.$$

Οι τετριμμένες υποομάδες D_4 και $\{1\}$ είναι χαρακτηριστικές. Επίσης η $\langle \rho \rangle$ είναι χαρακτηριστική, διότι είναι η μοναδική υποομάδα τάξης 4 που διαθέτει η D_4. Ας θεωρήσουμε τώρα τις υποομάδες τής D_4 που έχουν τάξη 2.
Η $\langle \rho^2 \rangle < D_4$ έχει τάξη 2 και μάλιστα είναι η μοναδική υποομάδα τής $\langle \rho \rangle$ τάξης 2, γι' αυτό είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής $\langle \rho \rangle$. Σύμφωνα με την Άσκηση 15, η $\langle \rho^2 \rangle$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής D_4.

Οι υπόλοιπες υποομάδες τάξης 2 έχουν ως γεννήτορα μια ανάκλαση, όπως το s, που ο άξονάς της ανήκει στο επίπεδο τού τετραγώνου. Αλλά η $\langle s \rangle$ δεν είναι ορθόθετη υποομάδα τής D_4, αφού για παράδειγμα $\rho s \rho^{-1} = \rho s \rho^3 = \rho\rho s \notin \langle s \rangle$. Συνεπώς, η $\langle s \rangle$ δεν είναι ούτε χαρακτηριστική υποομάδα τής D_4. Με ανάλογο επιχείρημα συμπεραίνουμε ότι καμιά από τις υποομάδες τάξης 2 τής D_4 που παράγονται από μια ανάκλαση, δεν είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής D_4.

Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα Q_8 των τετρανίων ορίζεται ως

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}, \text{ με } (-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

όπου το 1 είναι το ταυτοτικό στοιχείο τής Q_8 και όπου εξ ορισμού το -1 μετατίθεται με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο.

Υπενθυμίζουμε ότι από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το κέντρο $Z(Q_8)$ ισούται με $\{1, -1\}$ και ότι οι κλάσεις συζυγίας τής Q_8 είναι οι $\mathcal{K}_1 = \{1\}, \mathcal{K}_{-1} = \{-1\}, \mathcal{K}_i = \{i, -i\}, \mathcal{K}_j = \{j, -j\}$ και $\mathcal{K}_k = \{k, -k\}$.

Οι ορθόθετες υποομάδες τής Q_8 είναι ενώσεις κλάσεων συζυγίας και οι τάξεις τους είναι διαιρέτες τού 8. Έτσι προκύπτουν οι ορθόθετες υποομάδες:

$$Q_8, \langle i \rangle = \{1, -1, i, -i\}, \langle j \rangle = \{1, -1, j, -j\}, \langle k \rangle = \{1, -1, k, -k\}, Z(Q_8), \{1\}.$$

Οι Q_8 και $\{1\}$ είναι χαρακτηριστικές. Επίσης το κέντρο $Z(Q_8)$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα, αφού διατηρείται από κάθε αυτομορφισμό.

Παρατηρούμε ότι η Q_8 συμπίπτει με την υποομάδα της $\langle i, j \rangle$ που παράγεται από τα i, j καθώς και με την υποομάδα της $\langle j, k \rangle$ που παράγεται από τα j, k.

Η απεικόνιση $\phi : Q_8 \to Q_8$ με $\phi(i^\alpha j^\beta) = j^\alpha i^\beta, 1 \leq 1 \leq \alpha, \beta \leq 4$ είναι ένας αυτομορφισμός τής Q_8 που δεν απεικονίζει ούτε την $\langle i \rangle$ ούτε την $\langle j \rangle$ στον εαυτό της. Συνεπώς, οι $\langle i \rangle$ και $\langle j \rangle$ δεν είναι χαρακτηριστικές υποομάδες τής Q_8. Παρόμοια η απεικόνιση $\psi : Q_8 \to Q_8$ με $\psi(j^\alpha k^\beta) = k^\alpha j^\beta, 1 \leq \alpha, \beta \leq 4$ είναι ένας αυτομορφισμός τής Q_8 που δεν απεικονίζει την $\langle k \rangle$ στον εαυτό της. Επομένως, ούτε η $\langle k \rangle$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής Q_8.

Παράγωγες Υποομάδες, Επιλύσιμες Ομάδες

Α 17. Θεωρούμε την ομάδα $(\mathrm{Eqd}(\mathbb{R}), \circ)$ των απεικονίσεων τής ευθείας γραμμής $\mathbb{R}$ στον εαυτό της, οι οποίες διατηρούν τις αποστάσεις. Ως γνωστόν, το σύνολο $\mathrm{Eqd}(\mathbb{R})$ απαρτίζεται από τις απεικονίσεις

$$\theta_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \theta_{a,b}(x) = ax + b,\ \text{όπου } a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a \neq 0$$

και η πράξη που το δομεί σε ομάδα είναι η σύνθεση των απεικονίσεων. Να δειχθεί ότι η $(\mathrm{Eqd}(\mathbb{R}), \circ)$ είναι επιλύσιμη ομάδα.

Λύση. Έστω $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών και $\Phi : \mathrm{Eqd}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ η απεικόνιση $\theta_{a,b} \mapsto \Phi(\theta_{a,b}) := a$. Η Φ είναι ένας επιμορφισμός ομάδων με πυρήνα $\mathrm{Ker}\Phi = \{\theta_{a,b} \in \mathrm{Eqd}(\mathbb{R}) \mid a = 1\}$ (εύκολο!). Ο $\mathrm{Ker}\Phi$ είναι ως πυρήνας μια ορθόθετη υποομάδα και επιπλέον είναι αβελιανή, αφού $\theta_{1,b} \circ \theta_{1,d} = \theta_{1,b+d} = \theta_{1,d} \circ \theta_{1,b}$.

Θεωρούμε τη σειρά

$$\mathrm{Eqd}(\mathbb{R}) > \mathrm{Ker}\Phi > \{\mathrm{Id} = \theta_{1,0}\}$$

Οι $\mathrm{Ker}\Phi$ και $\{\mathrm{Id} = \theta_{1,0}\}$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής $\mathrm{Eqd}(\mathbb{R})$ και οι πηλικοομάδες $\mathrm{Eqd}(\mathbb{R})/\mathrm{Ker}\Phi \cong \mathbb{R}^*$ και $\mathrm{Ker}\Phi/\{\mathrm{Id} = \theta_{1,0}\} \cong \mathrm{Ker}\Phi$ είναι αβελιανές. Συνεπώς, η $\mathrm{Eqd}(\mathbb{R})$ είναι επιλύσιμη.

Α 18. Να δειχθεί ότι το σύνολο G των πραγματικών 4×4 πινάκων τής μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μια ομάδα και ότι το υποσύνολο A τής G που απαρτίζεται από τους πίνακες τής μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μια ορθόθετη αβελιανή υποομάδα τής G. Να δειχθεί ότι η παράγωγη υποομάδα G' περιέχεται στην A και κατόπιν ότι η G είναι μια επιλύσιμη ομάδα.

Λύση. Έστω η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^4, +)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^4, M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(M) := (a, b, d, e)$$

Η φ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, αφού αν,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } N = \begin{pmatrix} 1 & s & t & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & a+s & b+t & c+bw+x+ay \\ 0 & 1 & 0 & d+y \\ 0 & 0 & 1 & e+w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\varphi(MN) = (a+s, b+t, d+y, e+w) = (a, b, d, e)+(s, t, y, w) = \varphi(M)+\varphi(N).$$

Επιπλέον, ο φ είναι προφανώς επιμορφισμός με πυρήνα $\mathrm{Ker}(\varphi)$ την υποομάδα A που δίνεται στην εκφώνηση τής άσκησης. Ως εκ τούτου $A \trianglelefteq G$ και $G/A \cong \mathbb{R}^4$, η οποία είναι μια αβελιανή ομάδα. Γι' αυτό και η παράγωγη υποομάδα G' τής G περιέχεται στην A, δηλαδή $G' \subseteq A$.

Ισχυριζόμαστε ότι και $A \subseteq G'$, διότι κάθε στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ τής A ισούται με τον μεταθέτη

$$\left[\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&c\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ώστε $A = G'$.

Θεωρούμε τώρα τη σειρά

$$G \geq G' \geq \{e_G\}.$$

Η πηλικοομάδα $G/G' \cong \mathbb{R}^4$ είναι αβελιανή, αλλά και η πηλικοομάδα $G'/\{e_G\} \cong G' = A$ είναι αβελιανή, αφού

$$\begin{pmatrix}1&0&0&c\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&d\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&c+d\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ώστε η G είναι επιλύσιμη ομάδα.

Για τις επόμενες δύο ασκήσεις είναι ιδιαιτέρως χρήσιμοι οι ακόλουθοι τύποι που αναφέρονται στους μεταθέτες μιας ομάδας G και οι οποίοι αποδεικνύονται με άμεσους υπολογισμούς:

(α′)
$$\forall x, y, z \in G : [xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z],$$
(β′)
$$\forall x, y, z \in G : [x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1},$$
(γ′)
$$\forall x, y, z \in G : x^{-1}[[x, y^{-1}], z^{-1}]xz^{-1}[[z, x^{-1}], y^{-1}]zy^{-1}[[y, z^{-1}], x^{-1}]y = e_G.$$

Α 19. Έστω ότι G είναι μια ομάδα και $A, B \neq \emptyset$, δύο μη κενά υποσύνολα τής G. Συμβολίζουμε με $[A, B]$ την υποομάδα τής G που παράγεται από το σύνολο των μεταθετών $\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$.
Να δειχθεί ότι αν, μια ομάδα $(G, \star)$ παράγεται από ένα σύνολο K, τότε η μικρότερη ορθόθετη υποομάδα τής G που περιέχει την $[K, K]$ είναι η παράγωγη υποομάδα G'.

Λύση. Είναι προφανές ότι η $[K, K]$ περιέχεται στην $[G, G] = G'$, η οποία ως γνωστόν είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G.
Τώρα θα δείξουμε ότι αν $N \trianglelefteq G$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G με $[K, K] \leq N$, τότε και η G' περιέχεται στην N και προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y \in G$ ο γεννήτορας $[x, y]$ τής G' ανήκει στην N.

Αφού $\langle K \rangle = G$, κάθε $x \in G$ ισούται με ένα γινόμενο τής μορφής $x = a_1 a_2 \dots a_n$, όπου για κάθε a_i, είτε το a_i είτε το a_i^{-1} είναι στοιχείο τού K. Αυτό το εκφράζουμε εν συντομία γράφοντας $\forall i, 1 \leq i \leq n, a_i \in K \cup K^{-1}$, όπου βέβαια $K^{-1} = \{\kappa^{-1} \mid \kappa \in K\}$.

Έστω ότι $x = a_1 a_2 \dots a_n$ και $y = b_1 b_2 \dots b_m$ είναι στοιχεία τής G, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq n, a_i \in K \cup K^{-1}$ και $\forall j, 1 \leq i \leq m, b_j \in K \cup K^{-1}$. Θα δείξουμε με τη βοήθεια τής επαγωγής ως προς $n + m$ ότι $\forall x, y \in G$, ο μεταθέτης $[x, y]$ ανήκει στην N.

Παρατηρούμε γενικώς, ότι ένας μεταθέτης $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ ανήκει στην N αν, και μόνο αν το $x^{-1}[x, y]x = [y, x^{-1}]$ ανήκει στο N, αφού η N είναι ορθόθετη υποομάδα. Επομένως,

$$[x, y] \in N \Leftrightarrow [y, x^{-1}] \in N \Leftrightarrow [x^{-1}, y^{-1}] \in N \Leftrightarrow [y^{-1}, x] \in N. \qquad (*)$$

Επιπλέον, επειδή η N υποομάδα $[x, y] \in N$ αν , και μόνο αν, $[x, y]^{-1} = [y, x] \in N$

$$[x, y] \in N \Leftrightarrow [y, x] \in N \Leftrightarrow [x, y^{-1}] \in N \Leftrightarrow [y^{-1}, x^{-1}] \in N \Leftrightarrow [x^{-1}, y] \in N. \qquad (**)$$

Αν λοιπόν $n + m = 2$, τότε τα x, y ανήκουν στο $K \cup K^{-1}$ τότε, λόγω των (*) και (**), ο μεταθέτης $yx^{-1}y^{-1} = [x, y]$ ανήκει στην N.
Έστω ότι κάθε μεταθέτης $[x, y]$ με $x = a_1 a_2 \dots a_n$ και $y = b_1 b_2 \dots b_m$ ανήκει στην N, για κάθε n, m με $n + m \leq \ell$. Θα δείξουμε ότι κάθε μεταθέτης με $n + m = \ell + 1$ ανήκει επίσης στην N.

Αφού $n + m = \ell + 1$, θα είναι ή $x = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$ και $y = b_1 b_2 \dots b_m$ ή $x = a_1 a_2 \dots a_n$ και $y = b_1 b_2 \dots b_{m+1}$, όπου $a_i, b_j \in K \cup K^{-1}$.
Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιώντας τον τύπο (α′), που προηγείται τής άσκησης, έχουμε

$$[x, y] = [a_1(a_2 \dots a_{n+1}), y] = a_1[a_2 \dots a_{n+1}, y]a_1^{-1}[a_1, y].$$

Λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης οι μεταθέτες $[a_2 \dots a_{n+1}, y]$ και $[a_1, y]$ ανήκουν στην N. Επιλέον, επειδή η N είναι ορθόθετη το $a_1[a_2 \dots a_{n+1}, y]a_1^{-1}$ ανήκει επίσης στην N. Έτσι τελικώς ο $[x, y] \in N$.
Στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιώντας τον τύπο (β′), που προηγείται τής άσκησης, έχουμε

$$[x, y] = [x, b_1(b_2 \dots b_{m+1})] = [x, b_1]b_1[x, b_2 \dots b_{m+1}]b_1^{-1}.$$

και όπως προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ο $[x, y] \in N$.

Α 20. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι οι H, K και L είναι ορθόθετες υποομάδες τής G. Να δειχθεί ότι

(α′) $[[H, K], L] \subseteq [[K, L], H]\,[[L, H], K]$,

(β′) $[HK, L] = [H, L]]\,[K, L]$,

Λύση. Αρχίζουμε τη λύση με ορισμένες γενικές παρατηρήσεις:
Αν A, B είναι υποομάδες μιας ομάδας $(G, \star)$, τότε η υποομάδα $[A, B]$ ισούται με την υποομάδα $[B, A]$. Πράγματι, το αντίστροφο κάθε γεννήτορα $[a, b]$ τής $[A, B]$ ισούται με $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ και συνεπώς είναι ένας γεννήτορας τής $[B, A]$. Επομένως, $[A, B] \supseteq [B, A]$. Όμοια, $[B, A] \supseteq [A, B]$.
Αν A, B είναι ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας $(G, \star)$, τότε και η $[A, B]$ είναι επίσης ορθόθετη υποομάδα τής G. Για την απόδειξη τού ισχυρισμού είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\forall g \in G, a \in A, b \in B$, το $g[a, b]g^{-1}$ ανήκει στην $[A, B]$. Το τελευταίο είναι αληθές, αφού ένας απλός υπολογισμός δίνει
$g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in [A, B]$, αφού $A \trianglelefteq G$ και $B \trianglelefteq G$.
(α′) Σύμφωνα με τα παραπάνω η υποομάδα $[[K, L], H]\,[[L, H], K]$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G ως γινόμενο των ορθόθετων υποομάδων $[[K, L], H]$ και $[[L, H], K]$.

Ο τύπος (γ′) που προηγείται τής Άσκησης 19 μπορεί να γραφεί και ως

$$\forall x, y, z \in G :$$
$$x^{-1}\left[[x, y^{-1}], z^{-1}\right] x = \left(y^{-1}\left[[y, z^{-1}], x^{-1}\right]^{-1} y\right)\left(z^{-1}\left[[z, x^{-1}], y^{-1}\right]^{-1} z\right)$$

και εκτελώντας τις αντικαταστάσεις

$$y \mapsto y^{-1}, y^{-1} \mapsto y, z \mapsto z^{-1}, z^{-1} \mapsto z,$$

παίρνουμε

$$\forall x, y, z \in G :$$
$$x^{-1}\,[[x, y], z]\, x = \left(y\left[[y^{-1}, z], x^{-1}\right]^{-1} y^{-1}\right)\left(z\left[[z^{-1}, x^{-1}], y\right]^{-1} z^{-1}\right)$$

από όπου έπεται

$$\forall x, y, z \in G :$$
$$[[x, y], z] = \left((x^{-1}y)\left[[y^{-1}, z], x^{-1}\right]^{-1}(x^{-1}y)^{-1}\right)\left((x^{-1}z)\left[[z^{-1}, x^{-1}], y\right]^{-1}(x^{-1}z)^{-1}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τον αμέσως προηγούμενο τύπο, παρατηρούμε ότι $\forall x \in H$, $\forall y \in K$ και $\forall z \in L$, κάθε γεννήτορας $[[x, y], z]$ τής $[[H, K], L]$ ανήκει στην $[[K, L], H]\,[[L, H], K]$, αφού το $(x^{-1}y)\left[[y^{-1}, z], x^{-1}\right]^{-1}(x^{-1}y)^{-1}$ ανήκει στην $[[K, L], H]$, επειδή το $\left[[y^{-1}, z], x^{-1}\right]^{-1} \in [[K, L], H]$ και η $[[K, L], H]$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G και αντίστοιχα το $(x^{-1}z)\left[[z^{-1}, x^{-1}], y\right]^{-1}(x^{-1}z)^{-1}$ ανήκει στην $[[L, H], K]$, επειδή το $\left[[z^{-1}, x^{-1}], y\right]^{-1} \in [[L, H], K]$ και η $[[L, H], K]$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G.

Επομένως, $[[H, K], L] \subseteq [[K, L], H]\,[[L, H], K]$.

(β′) Παρατηρούμε ότι $[HK, L] \supseteq [H, L]]\,[K, L]$, αφού $[HK, L] \supseteq [H, L]]$ και $[HK, L] \supseteq [K, L]$. Υπολείπεται η απόδειξη τής σχέσης $[HK, L] \subseteq [H, L]\,[K, L]$.

Έστω $[xy, z], x \in H, y \in K, z \in L$ ένας γεννήτορας τής $[HK, L]$. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο $[xy, z]^{-1} = [z, xy]$ ανήκει στην $[H, L][K, L]$ από όπου έπεται ότι και ο $[xy, z] \in [H, L][K, L]$ και συνεπώς $[HK, L] \subseteq [H, L]\,[K, L]$.

Εφαρμόζοντας στο $[z, xy]$ τον τύπο (γ′) που προηγείται τής Άσκησης 19 παίρνουμε:

$$[z, xy] = [z, x](x[z, y]x^{-1}).$$

Το στοιχείο $[z, x]$ ανήκει στην υποομάδα $[L, H] = [H, L]$ και το στοιχείο $x[z, y]x^{-1}$ ανήκει στην $[L, K] = [K, L]$, διότι το $[z, y] \in [L, K]$ και η $[L, K]$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G. Επομένως, $[z, xy] \in [H, L][K, L]$.

Α 21. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι οι H, K είναι υποομάδες τής G. Να δειχθεί ότι η $[H, K]$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\langle H, K \rangle$.
(*Συμβολίζουμε με* $\langle H, K \rangle$ *την υποομάδα τής* G *που παράγεται από το σύνολο* $H \cup K$.)

Λύση. Παρατηρούμε ότι προφανώς η $[H, K]$ είναι υποομάδα τής $\langle H, K \rangle$.
Για να δείξουμε ότι $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε γεννήτορα $[h, k]$ τής $[H, K]$ και κάθε γεννήτορα α τής $\langle H, K \rangle$, το $\alpha^{-1}[h, k]\alpha$ είναι στοιχείο τής $[H, K]$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις $\alpha = \chi \in H$ και $\alpha = \kappa \in K$.
Θα δείξουμε ότι $\forall \chi \in H$, το $\chi^{-1}[h, k]\chi$ είναι στοιχείο τής $[H, K]$ και προτρέπουμε τον αναγνώστη να ασχοληθεί με την άλλη περίπτωση που είναι παρεμφερής.
Έχουμε:

$$\chi^{-1}[h, k]\chi = \chi^{-1}hkh^{-1}k^{-1}\chi = [\chi^{-1}h, k][\chi^{-1}, k]^{-1} \in [H, K].$$

Α 22. Έστω ένας ομομορφισμός ομάδων $\phi : G \to H$. Να δειχθεί ότι

(α′) $\phi(G)' = \phi(G')$.

(β′) Αν η H είναι επιλύσιμη ομάδα και ο ϕ είναι μονομορφισμός, τότε και η G είναι επιλύσιμη.

(γ′) Αν η G είναι επιλύσιμη ομάδα και ο ϕ είναι επιμορφισμός, τότε και η H είναι επιλύσιμη.

Λύση. (α′) Αν $[x, y]$ είναι ένας γεννήτορας τής παράγωγης ομάδας G' τής G, τότε το $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ ανήκει στην $\phi(G)'$. Επομένως, $\phi(G') \subseteq \phi(G)'$. Αλλά και αντίστροφα κάθε γεννήτορας τής $\phi(G)'$ είναι τής μορφής $[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y])$, όπου $x, y \in G$. Συνεπώς, $\phi(G)' \subseteq \phi(G')$. Ώστε, $\phi(G)' = \phi(G')$.
(β′) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι κάθε υποομάδα τής επιλύσιμης ομάδας H είναι επιλύσιμη. Επομένως, η $\phi(G)$ είναι επιλύσιμη και επιδή ο ϕ είναι ένας μονομορφισμός, συμπεραίνουμε ότι και η $G \cong \phi(G)$ είναι επιλύσιμη.
(γ′) Επειδή ο ϕ είναι ένας επιμορφισμός, είναι $H \cong G/\mathrm{Ker}(\phi)$. Αλλά κάθε πηλικοομάδα τής επιλύσιμης ομάδας G είναι επιλύσιμη. Επομένως η H είναι επιλύσιμη ομάδα.